

Methoden zur Analyse und Synthese der Kurbelausgleichsgetriebe

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960,
S.213-230



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Methoden zur Analyse und Synthese der Kurbelausgleichgetriebe

Von Prof. Dr.-Ing. Bekir Dizioglu

Vorgelegt von H. Schaefer

(Eingegangen am 15. 12. 1960)

Summary: This paper is a contribution of an earlier paper [1] which contained the dynamical analysis and synthesis of partially constrained crank mechanisms. It can be shown that the most practical used mechanisms of this type may be studied by means of a Hill differential equation. The stability of the motion of this mechanism is investigated in great details.

Übersicht: In dieser Arbeit werden die in einer früheren Arbeit des Verfassers begonnenen Untersuchungen über die Analyse und Synthese der Kurbelausgleichgetriebe fortgesetzt. Die Analyse einer großen Gruppe solcher Getriebe läßt sich auf Grund einer Hillschen Differentialgleichung durchführen. Das Stabilitätsverhalten der Getriebebewegung wird eingehend erörtert.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] wurde das dynamische Verhalten der Kurbelausgleichgetriebe im Rahmen der Theorie der kleinen Schwingungen behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen auf die Bewegungen solcher Getriebe erweitert, in denen der Bewegungsausschlag des energie-regelnden Gliedes endliche Größen erreichen kann. Dieser Behandlung liegen wiederum Getriebe von zwei Freiheitsgraden zugrunde.

Was den systematischen Aufbau dieser Kurbelausgleichgetriebe betrifft sowie deren praktische Vorteile gegenüber den entsprechenden zwangsläufigen Getrieben, so sei auf die obengenannte Arbeit und die dort angegebene Literatur hingewiesen.

2. Bewegungsgleichung

Wir betrachten ein n -gliedriges Kurbelausgleichgetriebe von zwei Freiheitsgraden (Abb. 1 a). Die Antriebskurbel A_0A drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Als Ausgleichelemente, die die dynamische Kopplung des Antriebes A_0A mit dem Abtriebsglied herstellen, seien Feder oder Federpakete von allgemeiner Kennlinie und Flüssigkeitsdämpfer mit der Dämpfungskonstante k' und linearem Dämpfungsgesetz verwendet. Es sei vorausgesetzt, daß die Bewegungsbahn des Punktes B_0 der Schwinge e' , an der die Ausgleichelemente unmittelbar wirken, durch eine Gerade ersetzt werden kann. Dies ist offenbar fast in allen praktisch wichtigen Fällen möglich. Unter dieser Annahme läßt sich bekanntlich die Schwinge e ein Geradeschubglied e von der leicht zu bestimmenden Masse m_0 ersetzen (Abb. 1 b). Entsprechend sind auch die gegebene Federkennlinie und Dämpfungskonstante bezüglich des Geradeschubgliedes umzurechnen. Hierzu werden die die Federkennlinie und Dämpfung bestimmenden Konstanten auf den Punkt B_0 reduziert (Abb. 1 a). Nach-

Hierin sind: \vec{b}_i der Beschleunigungsvektor des Ersatzpunktes i ; $\vec{\delta}_i$ derjenige Geschwindigkeitsvektor des Punktes i , wenn im Ausgleichgetriebe die Kurbel A_0A ruht und das Glied e mit der Geschwindigkeit \dot{q} bewegt wird; \vec{P}_h die an dem Punkt h wirkende äußere Kraft (Betriebskraft oder Nutzkraft). Die Summenzeichen beziehen sich auf die Gesamtheit der Punkte i und h .

Es sei \vec{b}_{i0} die Beschleunigung des Punktes i , die dem Falle „reiner Normalbeschleunigung“ der Kurbel A_0A und des Gliedes e entspricht [1]. Das ist die Beschleunigung des Punktes i für den Fall $\dot{\omega} = 0$ und $\ddot{q} = 0$. Mit λ sei die skalare Größe (\ddot{q}/\dot{q}) bezeichnet. So läßt sich, wie früher erwähnt [1], die Beschleunigung \vec{b}_i im Falle $\omega = \text{konst.}$ in der Form

$$\vec{b}_i = \vec{b}_{i0} + \lambda \vec{\delta}_i; \quad \left(\lambda = \frac{\ddot{q}}{\dot{q}} \right) \quad (4)$$

schreiben.

Durch das Einsetzen des Ausdruckes (4) in Gl. (3) erhalten wir schließlich

$$\left[m_i + \sum m_i \left(\frac{\vec{\delta}_i}{\dot{q}} \right)^2 \right] \ddot{q} + k \dot{q} + f(q) = - \sum m_i \vec{b}_{i0} \frac{\vec{\delta}_i}{\dot{q}} + \sum \vec{P}_h \frac{\vec{\delta}_h}{\dot{q}}. \quad (5)$$

In dieser Bewegungsgleichung für q ist, wenn die äußeren Kräfte von \ddot{q} unabhängig sind, die rechte Seite eine Funktion von $q = \omega t$, q und \dot{q} . Außerdem hängt offenbar der Koeffizient von \ddot{q} der Seite nur von $q = \omega t$ und \dot{q} ab. Somit kann man die Gl. (5) sofort in die folgende Form bringen:

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t). \quad (6)$$

Wir wissen aus der Theorie der Differentialgleichungen, daß, wenn die Funktion $F(q, \dot{q}, t)$ in q, \dot{q} und t analytisch ist, nur eine die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen ($q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ für $t = t_0$) erfüllende Lösung von (6) existiert. Ist außerdem $F(q, \dot{q}, t)$ eine periodische Funktion in t mit der Periode T , so muß, wenn eine periodische Lösung von (6) existiert, diese die Periode $N \cdot T$ besitzen. Hierbei ist N eine ganze Zahl. Für $N = 1$ nennt man die Lösung von (6) zu F harmonisch. Die Lösungen für $N = 1$ werden zu F subharmonisch genannt.

Die die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen erfüllende Lösung von (6) bzw. (5) läßt sich mit Hilfe eines bekannten numerischen Fortsetzungsverfahrens (z. B. *Runge-Kutta* oder *Blaess*) in gewünschter Genauigkeit herstellen. Hierzu sei auch auf das graphische Verfahren der allgemeinen Phasenebene von *Jacobsen* [3] hingewiesen.

Praktisch wird von einem Kurbelausgleichgetriebe gefordert, daß die Abtriebsbewegung nach dem Einschwingen einen stationären periodischen Verlauf besitzt und dieser von den Anfangsbedingungen der Bewegung unabhängig ist. Daher haben wir diejenigen Formen der Gl. (6) bzw. (5) zu bestimmen, bei denen die entsprechenden Lösungen die obengenannten Forderungen an den Bewegungsvorgang erfüllen.

3. Besondere Formen der Bewegungsgleichung

Wir setzen voraus, daß der Abtrieb n des betrachteten Ausgleichgetriebes (Abb. 1) ein Schiebeglied ist. Außerdem wirke am Getriebe außer dem notwendigen Antriebsmoment an der Kurbel AA_0 nur die mit $\varphi = \omega t$, 2π -periodische äußere Kraft $\vec{P}_D(\varphi)$ in der Bewegungsrichtung des Punktes D . Es seien nur die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehende Kurbel A_0A , das Glied e' bzw e sowie das Abtriebsglied n massebehaftet. Die Masse von n sei m_D .

Ist nun \vec{t}_D der in der als positiv gewählten Bewegungsrichtung angenommene Einheitsvektor, dann wird $\vec{b}_D = b_D \vec{t}_D$ und $\vec{\delta}_D = \delta_D \cdot \vec{t}_D$, $\vec{P}_D = P_D \cdot \vec{t}_D$. Unter diesen Voraussetzungen geht die Gl. (5) in die folgende Gestalt über:

$$\left[m_0 + m_D \left(\frac{\delta_D}{\dot{q}} \right)^2 \right] \ddot{q} + k \dot{q} + f(q) = -m_D b_D \frac{\delta_D}{\dot{q}} + P_D \frac{\delta_D}{\dot{q}}. \quad (7)$$

In Gl. (7) hängt die Funktion (δ_D/\dot{q}) von φ und q ab. Es sollen nun weiterhin die Fälle betrachtet werden, in denen die Funktionen (δ_D/\dot{q}) in dem praktisch in Frage kommenden Bereiche von q angenähert nur von $\varphi = \omega t$ abhängig sind.

Ob man bei einem vorgelegten Kurbelausgleichgetriebe diese Voraussetzung machen darf und für welchen Bereich von q diese gültig bleibt, läßt sich graphisch wie folgt feststellen. Man ordnet einer mit der willkürlichen Angabe von φ bestimmten Stellung der Antriebskurbel A_0A verschiedene mögliche Stellungen des Punktes B_0 zu durch die jeweilige Angabe des entsprechenden q -Wertes. Für jede solche Stellung wird dann in bekannter Weise [1] der jeweilige Wert der Funktion (δ_D/\dot{q}) bestimmt. Dieses wird nun für genügend viele Kurbelstellungen wiederholt. Bringt man schließlich in einem Koordinatensystem die so erhaltenen Werte von δ_D/\dot{q} in Abhängigkeit von q , so läßt sich aus den erhaltenen Kurvenscharen feststellen, wie weit δ_D/\dot{q} von \dot{q} unabhängig ist, Abb. 3. Aus dieser graphischen Darstellung läßt sich auch der Bewegungsbereich von B_0 (bzw. die Grenzen von q) bestimmen, innerhalb dessen (δ_D/\dot{q}) von q praktisch unabhängig wird. Ob bei der wirklichen Bewegung dieses Getriebes der Bewegungsbereich von B_0 innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen bleibt, hängt offenbar in erster Linie von den Größen m_0 , k sowie von den die Kennlinie $f(q)$ bestimmenden Federkonstanten ab.

Wir nehmen also an, daß (δ_D/\dot{q}) von q angenähert unabhängig ist. In diesem Falle wird (δ_D/\dot{q}) eine 2π -periodische Funktion von φ , die wir mit $F_D(\varphi)$ bezeichnen wollen. Es ist offenbar,

$$\frac{\delta_D}{\dot{q}} = \left(\frac{\delta_D}{\dot{q}} \right)_{q=0} = F_D(\varphi). \quad (8)$$

Es ist leicht, den Verlauf von $F_D(\varphi)$ für eine Kurbelumdrehung zeichnerisch zu bestimmen, indem man den Punkt D als einen Punkt des bei ruhender Kurbel ($\delta\varphi = 0$) entstandenen zwangsläufigen Getriebes betrachtet. Man nimmt für die Lage $q = 0$ dieses Getriebes eine beliebige Geschwindigkeit des Punktes D an und bestimmt zeichnerisch die entsprechende Geschwindigkeit \dot{q} des Punktes B_0 . Es ist dann das Verhältnis (δ_D/\dot{q}) zu bilden. Diese Bestimmung wird für etwa zwölf Stellungen der Antriebskurbel wiederholt (Abb. 4). $s_D(\varphi, q)$

sei die Bahnlänge des Punktes D des betrachteten Ausgleichgetriebes. Dann ist

$$b_{D0} = \left(\frac{d^2 s_D}{dt^2} \right)_{\dot{q}=0} . \quad (9)$$

Entwickelt man s_D in die Potenzreihe von q ,

$$s_D(q, q) = s_D(0, q) + q \cdot \left(\frac{\partial s_D}{\partial q} \right)_{q=0} + q^2 \left(\frac{\partial^2 s_D}{\partial q^2} \right)_{q=0} + \dots$$

und beachtet, daß der Ausdruck $\frac{\partial s_D}{\partial q} = \frac{\delta_D}{\dot{q}}$ unabhängig von q ist und somit

$\frac{\partial^n s_D}{\partial q^n} = 0$, ($n = 2, 3, \dots$) wird, dann erhält man

$$s_D(q, q) = s_D(0, q) + q \frac{\delta_D}{\dot{q}} = s_D^* + q \cdot F_D(q) . \quad (10)$$

Hierin ist $s_D^* = s_D(0, q)$ die entsprechende Bahnlänge von D des zwangsläufigen Getriebes, das aus dem vorliegenden Ausgleichgetriebe dadurch entsteht, indem man den Punkt B_0 an der Stelle $q = 0$ ruhend denkt. Somit ist s_D^* vollständig bekannt.

Aus (10) erhält man

$$b_{D0} = \left(\frac{d^2 s_D}{dt^2} \right)_{\dot{q}=0} = \ddot{s}_D^* + 2 \dot{F}_D \dot{q} + q \ddot{F}_D . \quad (11)$$

Durch Einsetzen von (8) und (11) in die Gl. (7) ergibt sich die folgende Bewegungsdifferentialgleichung für q ,

$$[m_0 + m_D F_D^2] \ddot{q} + [k + 2 m_D F_D \dot{F}_D] \dot{q} + m_D F_D \ddot{F}_D q + f(q) = -m_D \ddot{s}_D^* F_D + P_D F_D . \quad (12)$$

Nimmt man schließlich eine lineare Federkennlinie mit $f(q) = cq$ an, wobei c die Federkonstante ist, dann erhält Gl. (12) die folgende Gestalt,

$$[m_0 + m_D F_D^2] \ddot{q} + [k + 2 m_D F_D \dot{F}_D] \dot{q} + [c + m_D F_D \ddot{F}_D] q = (-m_D \ddot{s}_D^* + P_D) \cdot F_D . \quad (13)$$

Hierin ist $\ddot{s}_D^* = b_D^*$ die Beschleunigung des Punktes D im Falle des obengenannten zwangsläufigen Getriebes. Sie ist vollständig bekannt.

Die Gl. (13) ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Durch ihre Lösung ist nach (10) der vollständige Bewegungsverlauf des Abtriebes bzw. des Punktes D bestimmt.

Wir haben bisher angenommen, daß im Ausgleichgetriebe nur die Kurbel, das Glied e und das Abtriebsglied n massebehaftet sind. Wir lassen nun diese Annahme fallen, setzen aber voraus, daß die Bahnen sämtlicher Ersatzmassenpunkte angenähert durch Geraden ersetzt werden können. Dies würde z. B. der Fall sein, wenn in Abb. 2 die Länge BB_0 genügend groß ist C auf BB_0 liegt und die Koppel AB durch zusätzliche Massen in A und B ersetzt werden kann.

Für jeden Ersatzmassenpunkt i sei wiederum die Funktion (δ_i/\dot{q}) innerhalb der praktisch möglichen Grenzen von q unabhängig von q angenommen. Wir schreiben hierzu

$$\frac{\delta_i}{\dot{q}} = F_i(\varphi). \quad (14)$$

Bei einem solchen Ausgleichgetriebe wird infolgedessen die Bewegungsgleichung für q

$$[m_0 + \sum m_i F_i^2] \ddot{q} + [k + 2 \sum m_i F_i \dot{F}_i] \dot{q} + (\sum m_i F_i \ddot{F}_i) q + f(q) = -(\sum b_i^* m_i F_i) + P_D F_D. \quad (15)$$

Hierbei ist die Summenzeichen über alle Ersatzmassen zu erstrecken. Die Gl. (15) geht wieder mit $f(q) = c \cdot q$ in eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten über.

4. Stabilitätsverhalten der Bewegungsgleichung (13)

Es seien in Gl. (13) die folgenden dimensionslosen Größen

$$x = \frac{q}{r}, \quad \bar{m} = \frac{m_D}{m_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{m_0 \omega}, \quad \bar{c} = \frac{c}{m_0 \omega^2}, \quad (16)$$

ferner $t = \varphi/\omega$ eingeführt. Hierin ist r die Länge der Antriebskurbel A_0A . Außerdem sei die Ableitung nach φ mit einem Strich bezeichnet. Gl. (13) nimmt sonach die folgende Gestalt an:

$$x'' + \frac{1}{1 + \bar{m} F_D^2} [\bar{k} + 2 \bar{m} F_D F_D'] x' + \frac{1}{1 + \bar{m} F_D^2} [\bar{c} + \bar{m} F_D F_D''] x = \frac{F_D}{r m_0 \omega^2 (1 + \bar{m} F_D^2)} (-m_D \ddot{s}_D^* + P_D). \quad (17)$$

Wir interessieren uns jetzt für die Frage, unter welchen Umständen die allgemeine Lösung der sogenannten *Hill'schen* Differentialgleichung (17) stabil ist, d. h. beschränkt bleibt und nicht mit wachsendem x beliebig große Werte annehmen kann. Die praktische Bedeutung dieser Fragestellung ist einleuchtend.

Wenn x_h die allgemeine Lösung der homogenen und x_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (17) ist, so hat die allgemeine Lösung von (17) die Form

$$x = x_h + x_p. \quad (18)$$

Diese Lösung ist offenbar nur dann stabil, wenn sowohl x_h als auch x_p stabil ist.

Wir behandeln zuerst die homogene Gleichung. Die allgemeine Lösung dieser läßt sich, wenn wir von gewissen später kurz anzudeutenden Ausnahmefällen absehen, nach *Floquet* [4] stets wie folgt schreiben:

$$x_h = A e^{\mu_1 \varphi} \cdot G(\varphi) + B e^{\mu_2 \varphi} \cdot H(\varphi). \quad (19)$$

Hierbei sind die Funktionen $G(\varphi)$ und $H(\varphi)$ periodisch mit der Periode 2π . Die beiden Konstanten μ_1, μ_2 werden als „charakteristische Exponenten“ der Differentialgleichung bezeichnet.

Wie aus Gl. (19) unmittelbar zu ersehen ist, bleibt x_h stets beschränkt, wenn

$$\Re_e(\mu) \leq 0 \quad (20)$$

erfüllt ist. Die Bestimmung der charakteristischen Exponenten geschieht nach *Floquet* in folgender Weise. x_{h1} und x_{h2} seien zwei Lösungen, die ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung bilden und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_{h1}(0) &= \frac{d x_{h2}(0)}{d\varphi} = 1 \\ x_{h2}(0) &= \frac{d x_{h1}(0)}{d\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

erfüllen. Setzt man

$$s = e^{2\pi\mu} \quad (22)$$

wo s eine im allgemeinen komplexe Konstante bedeutet, so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für s [4]:

$$s^2 - [x_{h1}(2\pi) + x_{h2}'(2\pi)]s + e^{-2\pi Q} = 0. \quad (23)$$

Hierin ist

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \overline{m} F_D^2} [\overline{k} + 2 \overline{m} F_D F_D'] d\varphi. \quad (24)$$

Besitzt Gl. (23) eine Doppelwurzel $s_1 = s_2$, so gilt für die beiden charakteristischen Exponenten

$$\mu_1 = \mu_2 \pm i n, \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Die allgemeine Lösung wird dann nicht durch Gl. (19), sondern in der Form

$$x_h = e^{\mu_1 \varphi} [A G(\varphi) + B \varphi H(\varphi)]$$

gegeben. Hierin sind wiederum $G(\varphi)$ und $H(\varphi)$ periodische Funktionen mit der Periode 2π . Als Stabilitätsbedingung erhalten wir wieder die Gl. (20).

Gibt es schließlich eine Wurzel $s_1 = \pm 1$ der Gl. (23), dann wird nach Gl. (22),

$$\mu_1 = \pm i \frac{n}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

In diesem Falle gibt es, wie aus Gl. (19) zu ersehen ist, rein periodische Lösungen der homogenen Gleichung. Die Lösungen mit $n = 0, 2, 4, \dots$ heißen ganzperiodische Lösungen, die mit $n = 1, 3, 5, \dots$ halbperiodische Lösungen. Nach einem Satz von *Haupt* [4] bilden die zu den rein periodischen Lösungen gehörigen Parameterwerte (in unserem Falle $\overline{m}, \overline{k}, \overline{c}$) die Grenzen zwischen den stabilen und instabilen Lösungsgebieten.

Nun ist noch das Stabilitätsverhalten der partikulären Lösung x_p zu untersuchen. Da die Störungsfunktion der Gl. (17) eine 2π -periodische Funktion ist, so können wir die Lösung x_p als Fourierreihe ansetzen:

$$x_p = \sum_0^{\infty} g_v \cos v\varphi + \sum_0^{\infty} h_v \sin v\varphi. \quad (26)$$

Führt man diese Reihe in Gl. (17) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich ein unendliches Gleichungssystem für die g_v und h_v .

Dasselbe, jedoch homogene Gleichungssystem erhält man aber bei der Berechnung der ganzperiodischen Lösungen. Für diejenigen Parameterwerte \bar{m} , \bar{k} , \bar{c} , für die x_h als ganzperiodische Lösung erscheint, verschwindet daher die Nennerdeterminante des Gleichungssystems von g_v , h_v . Die Koeffizienten g_v und h_v wachsen dann über alle Grenzen.

Die ganzperiodischen Lösungen können aber eintreten, wenn nach Gl. (25) die notwendige Bedingung $\Re_e(\mu) = 0$ erfüllt wird.

Daher bleibt die allgemeine Lösung $x = x_h + x_p$ beschränkt, wenn

$$\Re_e(\mu) < 0 \quad (27)$$

gilt. Gl. (27) ist somit Stabilitätsbedingung der Getriebewegung.

Die tatsächliche Durchführung der notwendigen Berechnungen für die oben dargelegten Stabilitätsuntersuchungen ist aus der Literatur über die *Hills*-schen Differentialgleichungen genügend bekannt. Wir weisen hierbei auf eine interessante Arbeit von *Brillouin* hin [5].

Nachstehend wird zuerst eine einfache für die Stabilität der Bewegung hinreichende Bedingung abgeleitet, die bei vielen Ausgleichgetrieben angewendet werden kann.

Es sei die homogene Gleichung von Gl. (17) durch die Substitution

$$x_h = y \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 + \bar{m} F_D^2} [\bar{k} + 2 \bar{m}_D F_D F_D'] d\varphi} \quad (28)$$

in die Normalform

$$y'' + P(\varphi) y = 0 \quad (29)$$

übergeführt, wobei

$$P(\varphi) = U(\varphi) [\bar{c} - \bar{m} F_D'^2] - \frac{1}{2} U'(\varphi) [\bar{k} + 2 \bar{m} F_D F_D'] - \frac{1}{4} U^2 [\bar{k} + 2 \bar{m} F_D F_D']^2 \quad (30)$$

und

$$U = \frac{1}{1 + \bar{m} F_D^2}. \quad (31)$$

bedeutet. Es sei nun die 2π -periodische Funktion $P(\varphi)$ durch ein Fourier-Polynom dargestellt. Dann haben wir für Gl. (29)

$$y'' + \left[a_0 + \sum_1^n a_n \cos(n\varphi + \psi_n) \right] y = 0. \quad (29^*)$$

Hierbei sind a_0, a_1, a_2, \dots dimensionslose Konstanten, die wir hier nicht explizit anzuschreiben brauchen. Es werden nun durch $(a_n/a_0) = \varepsilon_n$ ($n=1, 2, 3 \dots$) neue dimensionslose Konstanten ε_n eingeführt. Die homogene Gleichung (29*) nimmt dann die folgende Form an:

$$y'' + a_0 \left[1 + \sum_1^n \varepsilon_n \cos(n\varphi + \psi_n) \right] y = 0. \quad (30^*)$$

Unter der Voraussetzung

$$\varepsilon_n \ll 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (31^*)$$

haben wir nun die Möglichkeit, in einfacher Weise eine Lösung von Gl. (31*) herzustellen. Hierzu entwickeln wir die Lösung von (31*) in die Potenzreihe des klein vorausgesetzten Parameters ε_n und brechen diese Potenzreihe jeweils nach der ersten Potenz von ε_n ab:

$$y = y_0 + \sum_1^n \varepsilon_n y_n. \quad (32)$$

Geht man mit dieser Entwicklung in Gl. (30*) ein, so erhalten wir eine Folge von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die y_0 und y_n , die sich schrittweise auflösen lassen. Die durchgeführte Rechnung ergibt die folgende Form der Lösung:

$$y = C_1 e^{-i\sqrt{a_0}\varphi} \cdot T(\varphi) + C_2 e^{+i\sqrt{a_0}\varphi} \cdot S(\varphi) \quad (33)$$

$$(i = \sqrt{-1}),$$

wobei $T(\varphi)$ und $S(\varphi)$ Funktionen von der Periode 2π und C_1, C_2 freiverfügbaren Konstanten sind. Die expliziten Formen von $T(\varphi)$ und $S(\varphi)$ brauchen wir nicht.

Es sei nun zuerst $U(\varphi)$ in Gl. (31) in der Form

$$U(\varphi) = R_0 + f(\varphi) \quad (34)$$

geschrieben, wobei

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\varphi) d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

sind. Wir setzen voraus, daß der Mittelwert R_0 existiert, und außerdem sei $R_0 > 0$. Dann nimmt die Substitution (28) die folgende Form an:

$$x_h = y \cdot e^{-\frac{\bar{k} R_0}{2} \varphi} \cdot N(\varphi). \quad (35)$$

Darin ist $N(\varphi)$ wiederum ein Funktion von der Periode 2π . Setzt man Gl. (33) in Gl. (35) ein, so erhalten wir schließlich

$$x = C_1 e^{\left(-\frac{\bar{k} R_0}{2} - i\sqrt{a_0}\right)\varphi} \cdot \bar{T}(\varphi) + C_2 e^{\left(-\frac{\bar{k} R_0}{2} + i\sqrt{a_0}\right)\varphi} \cdot \bar{S}(\varphi). \quad (36)$$

Diese Lösung besitzt die Floquetsche Form, Gl. (19), so daß man sofort die beiden charakteristischen Exponenten μ_1, μ_2 bestimmen kann:

$$\mu_1 = -\frac{\bar{k} R_0}{2} - i\sqrt{a_0}; \quad \mu_2 = -\frac{\bar{k} R_0}{2} + i\sqrt{a_0}. \quad (37)$$

Auf Grund der Stabilitätsbedingung (27) können wir demnach das folgende Kriterium angeben: „Für diejenigen Werte von $(\bar{m}, \bar{c}, \bar{k})$, für die die Bedingung (31*) erfüllt bleibt, wird die Bewegung bei positiver Dämpfung und $R_0 > 0$ stets stabil.“

Unter gewissen praktisch vertretbaren Annahmen läßt sich die Form von $P(\varphi)$ in (30) soweit vereinfachen, daß man schließlich für die Stabilitätsuntersuchung der Bewegung eine bekannte *Ince-Strutt*-Karte benutzen kann. Hierzu schreiben wir zuerst $F_D(\varphi)$ in der Form

$$F_D(\varphi) = d_0 + F(\varphi) \quad (38)$$

wobei

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_D(\varphi) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = 0$$

sind. Nun setzen wir voraus, daß in Gl. (34) und (38),

$$|f(\varphi)| \ll R_0, \quad |F(\varphi)| \ll d_0 \quad (39)$$

angenommen werden kann. Dann wird in Gl. (30)

$$\bar{m} F_D'^2 \ll \bar{c}.$$

Außerdem lassen wir das mit $(dU/d\varphi)$ behaftete Glied weg und führen für den Ausdruck $U \cdot [\bar{k} + 2 \bar{m} F_D F_D']$ seinen Mittelwert ein. Dieser ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \bar{m} F_D^2} [\bar{k} + 2 \bar{m} F_D F_D'] d\varphi = \bar{k} R_0. \quad (40)$$

Ist schließlich in Gl. (34) die Funktion $f(\varphi)$ in der einfachen Form $f(\varphi) = A \cos(\varphi + \vartheta)$ darstellbar, wobei A und ϑ konstante Größen sind, so nimmt $P(\varphi)$ in Gl. (30) die folgende einfache Gestalt an:

$$P(\varphi) = R_0 \left(\bar{c} - \frac{1}{4} \bar{k}^2 R_0 \right) + \bar{c} A \cos(\varphi + \vartheta). \quad (41)$$

Die Substitution (28) hat wegen der Annahme (40) die Gestalt

$$x_h = y e^{-\frac{1}{2} \bar{k} R_0 \varphi}. \quad (42)$$

Es entspricht nun der Normalform (29) mit der Belegfunktion (41) auf Grund der Transformation (42) eine homogene *Mathieusche* Differentialgleichung mit linearem Dämpfungsglied. Die *Ince-Strutt*-Karte dieser Differentialgleichung ist bekannt [6]. Man kann nun mit Hilfe dieser Karte bei einem vorgelegten Ausgleichgetriebe den Einfluß etwaiger Änderungen von $\bar{c}, \bar{k}, \bar{m}$ auf die Stabilität der Bewegung eingehend diskutieren.

5. Eine wesentliche Vereinfachung der Gl (17)

Sind die Schwankungen der Funktion $F_D(\varphi)$ in Gl. (38) um ihren Mittelwert d_0 vernachlässigbar klein, dann läßt sich statt $F_D(\varphi)$ der konstante Mittelwert d_0 einsetzen, wobei

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_D(\varphi) d\varphi$$

ist. In diesem Fall geht die Gl. (17) in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten über:

$$x'' + \frac{\bar{k}}{1 + \bar{m} d_0^2} x' + \frac{\bar{c}}{1 + \bar{m} d_0^2} x = \frac{d_0}{r m_0 \omega^2 (1 + \bar{m} d_0^2)} (-m_D \ddot{s}_D^* + P_D). \quad (43)$$

Es sei die Fourier-Entwicklung der rechten Seite der Gl. (43) bekannt oder aus den graphisch gegebenen Darstellungen von $\ddot{s}_D^*(\varphi)$ und $P_D(\varphi)$ bestimmt. Dann ist die stationäre Lösung der Gl. (43) sofort aufzuschreiben [1].

6. Beispiel

Die in obigen Abschnitten durchgeführten Methoden und Überlegungen sollen nun an einem Beispiel erörtert werden.

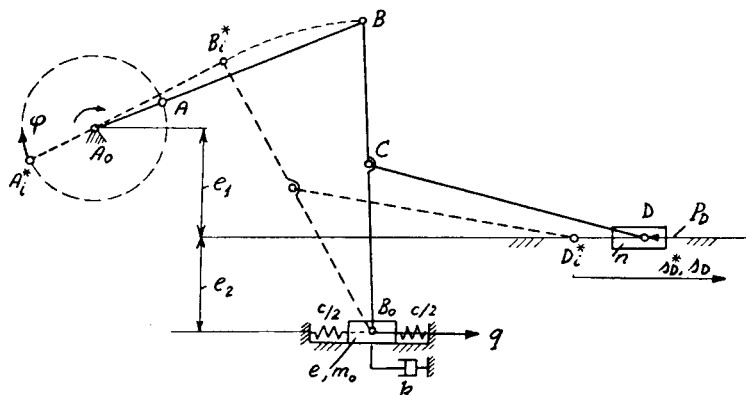


Abb. 2. Siebengliedriges Ausgleichgetriebe als Zahlenbeispiel

In Abb. 2 ist ein siebengliedriges Kurbelausgleichgetriebe angegeben. Die Kurbel $A A_0 = r$ drehe sich hierbei mit konstanter Drehgeschwindigkeit ω . Die Bahngeraden von D und B_0 seien einander parallel. Die auf die Kurbel bezogenen Abmessungen seien

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{AB}} = 3, \quad \overline{\overline{BB_0}} = 4,3, \quad \overline{\overline{CB_0}} = 2,3, \quad \overline{\overline{CD}} = 4 \\ \overline{\overline{A_0A}} = 1,5, \quad \overline{\overline{A_0A}} = 1,3, \quad \left(\overline{\overline{\frac{A_0B_0}{A_0A}}} \right)_{q=0} = 4,8 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Im Getriebe sollen nur die Kurbel, das Glied e und das Abtriebsglied n massenbehaftet sein. Es wirken keine äußeren Kräfte. Für (16) sind die folgenden Zahlenwerte angenommen:

$$\bar{m} = 1, \quad k = 0,6, \quad \bar{c} = 0,7. \quad (45)$$

Hält man in Abb. 2 das Gelenk B_0 in der Lage $q = 0$ fest, so entsteht ein sechsgliedriges zwangsläufiges Kurbelgetriebe. Dieses Getriebe wird das dem Ausgleichgetriebe entsprechende zwangsläufige Getriebe genannt. A_i^* und D_i^* seien die inneren Totlagen der Kurbel bzw. des Abtriebsgliedes dieses zwangsläufigen Getriebes. Der Antriebswinkel φ wird nun von der Totlage $A_0 A_i^*$ aus in der Drehrichtung gemessen. Die entsprechende Aussage für s_D bzw. s_D^b ist im Bild angedeutet.

Nach Gl. (8) ist zuerst festzustellen, wieweit die Funktion (δ_D/\dot{q}) von q unabhängig ist. Hierzu wurde mit Hilfe der im Abschnitt 3 angedeuteten Methode für verschiedene Kurbelstellungen die Abhängigkeit der Funktion (δ_D/\dot{q}) von q bestimmt. In Abb. 3 sind die Ergebnisse für das Getriebe Bild 2 graphisch

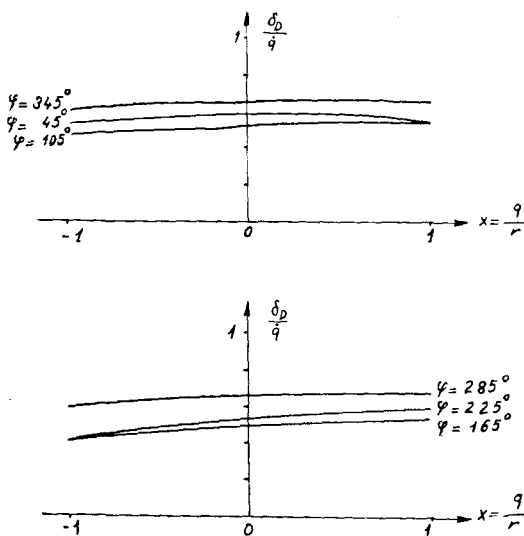


Abb. 3. Die Abhängigkeit der Größe $\frac{\delta_D}{\dot{q}}$ von q bzw. x für verschiedene Kurbelstellungen des Kurbelausgleichgetriebes nach Bild 2

dargestellt. Aus diesem Diagramm ist zu entnehmen, daß (δ_D/\dot{q}) für weite Grenzen von q bzw. q/r praktisch von q unabhängig bleibt.

In Abb. 4 ist nun die Abhängigkeit $(\delta_D/\dot{q})_{q=0} = F_D(\varphi)$ von φ dargestellt. Für nachstehende Rechnungen brauchen wir die Abhängigkeit der Funktion $U = 1/(1 + \bar{m} F_D^2)$ von φ . Diese ist in Abb. 5 angegeben.

Zur Feststellung der Stabilität der Getriebebewegung ist es erforderlich, die Belegfunktion $P(\varphi)$ nach (30) zu kennen. Hierzu wurden nun die Funk-

tionen $F_D(\varphi)$ und U (Bild 4 und 5) in die Fourierreihen entwickelt und anschließend daraus durch Differentiation die Funktionen F_D' , F_D'' und U' bestimmt. Das Fourier-Polynom für $P(\varphi)$ wird somit

$$P(\varphi) = 0,479 [1 - 0,090 \cos(\varphi + 33^\circ \cdot 58') + 0,022 \cos(2\varphi + 49^\circ \cdot 38')] . \quad (46)$$

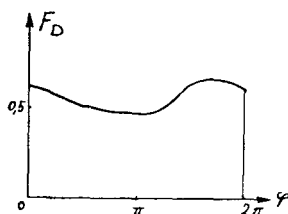


Abb. 4. Der Verlauf der Funktion $\left(\frac{\delta_D}{q}\right)_{q=0} = F_D(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ für das Getriebe nach Bild 2

Wir haben demnach nach (30*) und (31*)

$$a_0 = 0,479 > 0; \quad \varepsilon_1 = 0,090 \ll 1; \quad \varepsilon_2 = 0,022 \ll 1 . \quad (47)$$

Außerdem ist nach Abb. 5 der über eine Periode ermittelte Mittelwert R_0 von U positiv.

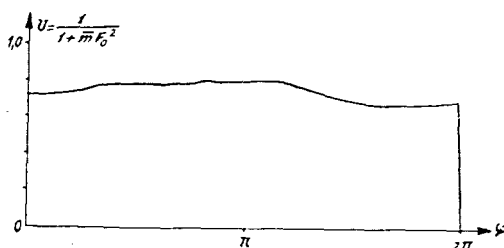


Abb. 5. U als Funktion von φ im Getriebe nach Bild 2

Infolgedessen sind die Stabilitätsbedingungen der Getriebebewegung erfüllt.

Es ist nun die stationäre Bewegung des Punktes B_0 (Bild 2) bzw. die stationäre Lösung der Differentialgleichung (17) zu bestimmen. In der rechten Seite von (17) ist noch der Verlauf $\ddot{s}_D^* = \omega^2 \cdot \ddot{s}_D''$ zu bestimmen. \ddot{s}_D^* ist bekanntlich der Beschleunigungsverlauf des entsprechenden zwangsläufigen Getriebes. Dieser Verlauf wurde nun nach der geläufigen Methode der Beschleunigungsermittlung graphisch bestimmt. Dieser Verlauf sowie der entsprechende Weg- und Geschwindigkeitsverlauf von D ist in Abb. 6 dargestellt.

Die Integration der Gl. (17) geschieht nun in einfacher Weise nach der graphischen Methode der *Jacobsenschen* Phasenebene [3]. Ausgehend von den freigewählten Anfangsbedingungen ($x_0 = 0,4$, $x_0' = 0$ für $\varphi = 0$) wurde die Integration mit der Schrittgröße $\Delta\varphi = 15^\circ$ durchgeführt. Jeder Schritt wurde sogleich mit Hilfe des Halbschrittes verbessert (Abb. 7). Die Integration wird

bis zur Erhaltung einer geschlossenen Kurve durchgeführt (Abb. 7b). Das Intervall zwischen zwei Punkten der Kurve entspricht einem Drehwinkel von $\Delta\varphi = 15^\circ$.

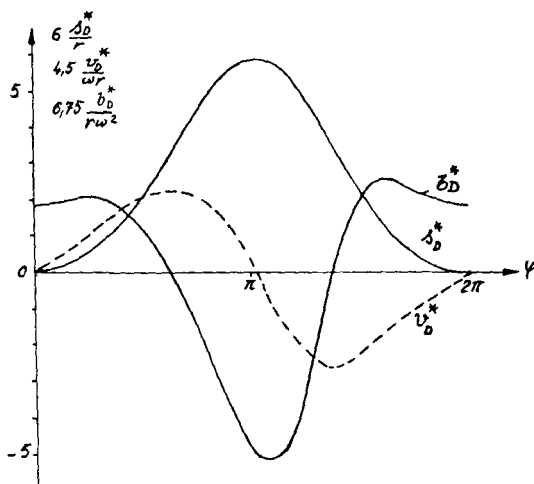
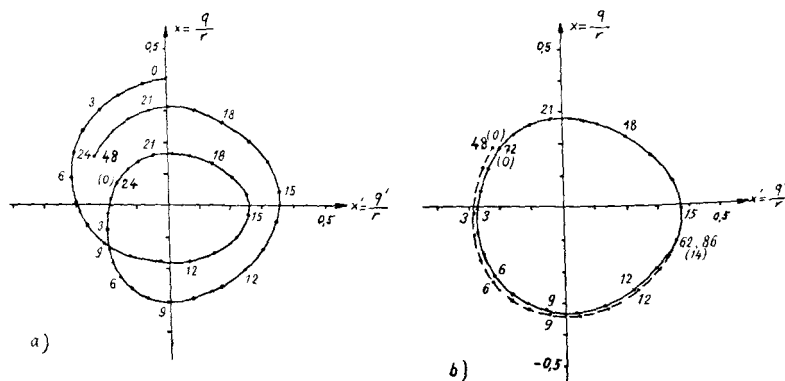


Abb. 6. Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung des zwangläufigen Getriebes das dem im Bild 2 dargestellten Ausgleichgetriebe entspricht

In Abb. 8a ist das aus der Phasenebene entnommene Bewegungsdiagramm des Punktes B_0 angegeben.

Abschließend wurde die Funktion $F_D(\varphi)$ durch den Mittelwert $d_0 = 0,565$ (Abb. 4) ersetzt und die einfache Gl. (43) integriert.



In Abb. 8b ist die somit erhaltene stationäre Lösung der Gl. (43) angegeben. In Abb. 8b wurde zum Vergleich auch die stationäre Lösung im Falle der veränderlichen Funktion $F_D(\varphi)$ eingetragen.

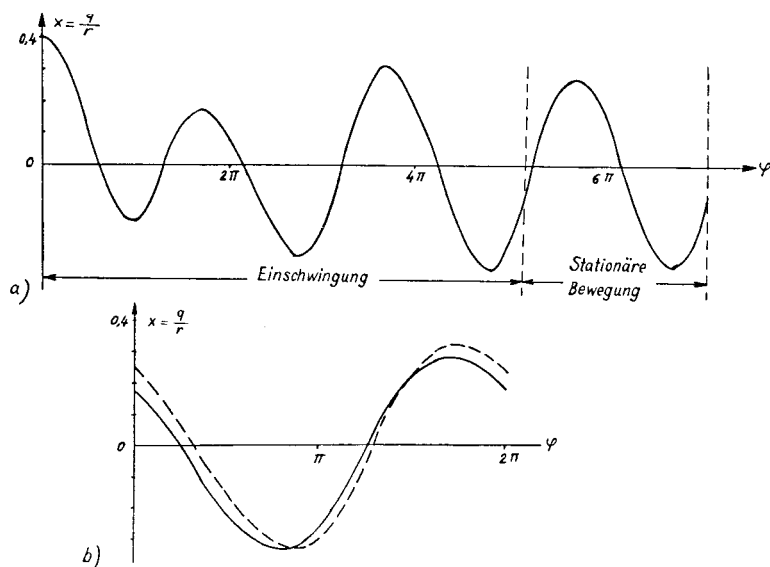


Abb. 8. Die Bewegung des Punktes B_0 des Getriebes nach Bild 2

- a) Einschwingvorgang- und stationäre Bewegung des Punktes B_0
 b) - - - - - Die stationäre Lösung für $F_D = d_0 = 0,565$
 ——— Die stationäre Lösung bei veränderlichem Verlauf von $F_D(\varphi)$. Diese Lösung ist aus Bild 8a zu entnehmen

In Abb. 8 war die stationäre Bewegung des Punktes B_0 angegeben. Aus der Gl. (10) erhalten wir nun die stationäre Bewegung der Abtriebsbewegung des im Bild (2) gegebenen Ausgleichgetriebes. Hierbei ist s_D^* und $F_D(\varphi)$ aus den Bildern 6 und 4 zu entnehmen. In den Abb. 9, 10 und 11 sind die errechneten

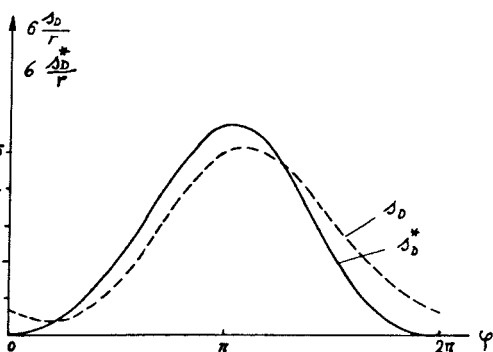


Abb. 9. Verlauf des bezogenen Weges $6 \frac{s_D}{r}$ bzw. $6 \frac{s_D^*}{r}$ des Punktes B_0 im Ausgleichgetriebe bzw. entsprechenden zwangsläufigen Getriebe nach Bild 2

Verläufe des Weges, der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Antriebsbewegung dargestellt. Zum Vergleich sind dabei auch die zugeordneten Größen für das entsprechende zwangsläufige Getriebe eingetragen.

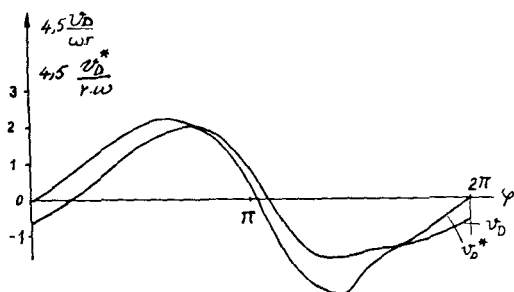


Abb. 10. Verlauf der bezogenen Geschwindigkeit $4,5 \frac{v_D}{r\omega}$ bzw. $4,5 \frac{v_D^*}{r\omega}$.

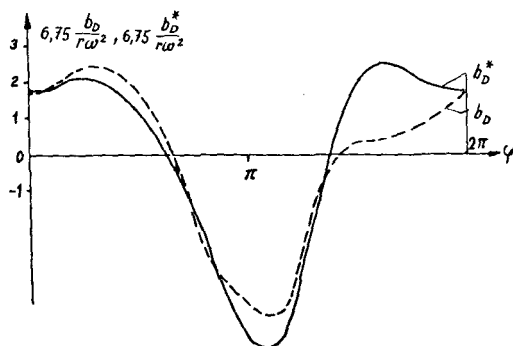


Abb. 11. Verlauf der bezogenen Beschleunigung $6,75 \frac{b_D}{r\omega^2}$ bzw. $6,75 \frac{b_D^*}{r\omega^2}$.

7. Synthese der Kurbelausgleichgetriebe

Die allgemeine Methodik der Synthese der Kurbelausgleichgetriebe wurde in der früheren Arbeit des Verfassers [1] erörtert. Deshalb begnügen wir uns hier mit einem kurzen Hinweis.

Bei dem in Abb. 2 angegebenen Getriebe sei nun der Bewegungsverlauf $s_D(\varphi)$ des Abtriebsbewegung auf Grund praktischer Forderungen vorgeschrieben. Es sind die noch freiverfügbaren Größen (m_0, k, c) bzw. $(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})$ so zu bestimmen, daß diese Bewegung des Abtriebes bei der konstanten Drehgeschwindigkeit ω der Antriebskurbel sich tatsächlich einstellt und daß die Getriebebewegung stabil bleibt. Es wird demnach gewissermaßen die Umkehrung der Getriebeanalyse verlangt.

Es wird zuerst aus der vorgeschriebenen Abtriebsbewegung nach Gl. (10), der Verlauf von q bzw. $(x = q/r)$ bestimmt.

Man berechnet zuerst aus x die Funktionen \dot{x} , \ddot{x} und setzt diese in Gl. (17) ein. Hierbei ist \ddot{s}_D^* sowie $F_D(\varphi)$ aus dem gegebenen Getriebe (Abb. 2) bekannt. Es sind nun $\overline{m}, \overline{k}, \overline{c}$ so zu bestimmen, daß die Gl. (17) für den vorgeschriebenen Bewegungsverlauf gültig bleibt.

Schließlich muß geprüft werden, ob für die somit bestimmten Größen $\overline{m}, \overline{k}, \overline{c}$ die Getriebebewegung stabil ist.

Literatur

- [1] *Dizioğlu, Bekir*: Dynamische Getriebesynthese der Kurbelausgleichgetriebe. Forsch. Ing.-Wes. 26 (1960) S. 37/47.
- [2] *Wittenbauer, F.*: Graphische Dynamik. Berlin 1923.
- [3] *L. S. Jacobsen-R. S. Ayre*: Engineering Vibrations. McGraw-Hill 1958 S. 244.
- [4] *Strutt, M. J. O.*: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin 1932.
- [5] *Brillouin, L.*: A practical method for solving Hill's equations. Quartl. appl. math. vol. VI (1948) S. 167/178.